Први колоквијум из Алгебре 2
Р смер, 27.4.2016.

(1) Одредити (до на изоморфизам) групе $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_{27}\times\mathbb{Z}_4)$ и $\operatorname{Inn}(\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_{27}\times\mathbb{Z}_4))$.

Решење. Из НЗД$(27,4)=1$ следи $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_{27}\times\mathbb{Z}_4)\cong\operatorname{Aut}\mathbb{Z}_{27}\times\operatorname{Aut}\mathbb{Z}_4\cong\Phi_{27}\times\Phi_4$ (или $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_{27}\times\mathbb{Z}_4)\cong\operatorname{Aut}\mathbb{Z}_{108}\cong\Phi_{108}$). Група $\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_{27}\times\mathbb{Z}_4)$ је Абелова, па је $\operatorname{Inn}(\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_{27}\times\mathbb{Z}_4))\cong\{e\}$.

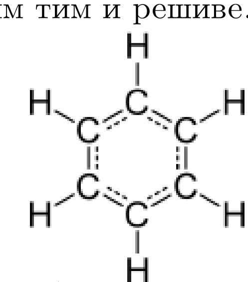
(2) Нека је p прост број и нека је G некомутативна група реда p^3. Показати да је $Z(G)\cong C_p$ и $Inn(G)\cong C_p\times C_p$. Да ли је група G решива?

Решење. Према Лагранжевој теореми $|Z(G)|$ дели $|G|=p^3$. Група G је некомутативна ($|Z(G)|\neq p^3$) и p–група ($|Z(G)|\neq 1$), па је $|Z(G)|\in\{p,p^2\}$. У случају да је $|Z(G)|=p^2$, имамо $|\operatorname{Inn}G|=|G/Z(G)|=[G:Z(G)]=\frac{|G|}{|Z(G)|}=p$ што није могуће.

Дакле, $|Z(G)|=p$ што повлачи $Z(G)\cong C_p$. Следи, $|\operatorname{Inn}G|=\frac{|G|}{|Z(G)|}=p^2$. Знамо да група $\operatorname{Inn}G$ није циклична, па је једина могућност $Z(G)\cong C_p\times C_p$ (радили смо за $p=2$, исто пролази за било који прост број p).

Група G је решива јер је $Z(G)\lhd G$, а $Z(G)$ и $G/Z(G)\cong\operatorname{Inn}G$ су Абелове, па самим тим и решиве.

(3) Молекул бензена је састављен од 6 атома угљеника и 6 атома водоника распоређених као на слици. У природи постоје два изотопа угљеника: ^{12}C и ^{13}C и два изотопа водоника: ^{1}H и ^{2}H. Колико различитих изотопа бензена постоји?



Решење. За свако теме шестоугла имамо по четири могућности $(^{12}C,^{1}H)$, $(^{12}C,^{2}H)$, $(^{13}C,^{1}H)$ и $(^{13}C,^{2}H)$. Зато ћемо посматрати дејство диедарске групе $\mathbb{D}_6=\langle\rho,\sigma\rangle$ на четворочлан скуп (где је σ симетрија у односу на праву која пролази кроз два темена).

$$n_\varepsilon=4^6,\quad n_\rho=n_{\rho^5}=4,\quad n_{\rho^2}=n_{\rho^4}=4^2,\quad n_{\rho^3}=4^3,\quad n_\sigma=n_{\rho^2\sigma}=n_{\rho^4\sigma}=4^4,\quad n_{\rho\sigma}=n_{\rho^3\sigma}=n_{\rho^5\sigma}=4^3$$

Број различитих изотопа бензена је

$$\frac{\sum\limits_{\phi\in\mathbb{D}_6}n_\phi}{|\mathbb{D}_6|}=\frac{4^6+3\cdot4^4+4\cdot4^3+2\cdot4^2+2\cdot4}{12}=\dots$$

(4) Дата је група G реда 96 која нема нормалну подгрупу реда 48. Показати да G има нормалну подгрупу реда 32.

Решење. Група G има бар једну Силовљеву 2–подгрупу H (реда 32 и индекса 3). Према теореми о факторијелу $\frac{|G|}{|\operatorname{Core}H|}=[G:\operatorname{Core}H]\Big|[G:H]!=3!=6$. Из $\frac{96}{|CoreH|}\Big|6$ следи да 16 дели $|\operatorname{Core}H|$. Са друге стране, из Лагранжеве теореме следи да $\operatorname{Core}H$ дели $|H|=32$, па је $|\operatorname{Core}H|\in\{16,32\}$.

Претпоставимо супротно, $|\operatorname{Core}H|=16$. Постоји бар једна Силовљева 3–подгрупа K. Пошто је $\operatorname{Core}H\lhd G$, $K\operatorname{Core}H$ ће бити подгрупа G реда $\frac{|K|\cdot|\operatorname{Core}H|}{|K\cap\operatorname{Core}H|}=\frac{3\cdot16}{1}=48$. Дакле, $K\operatorname{Core}H\lhd G$ (јер је индекса 2) што није могуће. Следи, група G има нормалну подгрупу $\operatorname{Core}H$ реда 32.